Résumé 12 : Topologie (3)

$(E, \|.\|)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Compacité

§ 1. ***Suites d'un compact.***– On prend ici la propriété de Bolzano Weierstrass pour une définition :

Définition I.1

On dit d'une partie K de E qu'elle est **compacte**, *ou qu'elle vérifie la* **propriété de Bolzano-Weierstrass**, *lorsque toute suite d'éléments de K admet une valeur d'adhérence, i.e si $(u_n) \in K^{\mathbb{N}}$, alors il existe $\ell \in K$ et $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$.*

Ainsi, $[a, b]$ est un compact, ainsi que toute partie finie de E. $[a, b[$ et $B(0_E, 1)$ ne le sont pas.

Proposition I.2

(i) Si K est compacte, K est fermée et bornée.

(ii) Si K est compacte, une partie F de K est compacte $\Longleftrightarrow$ F est fermée.

Nous utiliserons très souvent, notamment pour prouver que la convergence absolue d'une série entraine sa convergence :

Proposition I.3

Soit K un compact et (u_n) une suite dont l'image est dans K. On a équivalence entre :

(i) (u_n) converge.

(ii) (u_n) admet <u>exactement</u> une valeur d'adhérence.

(iii) (u_n) admet au plus une valeur d'adhérence.

§ 2. ***Continuité et compacité.***– Ce qui va nous fournir de nombreux exemples de compacts.

Proposition I.4

Soit f une fonction continue définie sur une partie compacte A d'un espace vectoriel normé. Alors,

(i) f est uniformément continue.

(ii) $f(K)$ est compact.

(iii) f est bornée et si elle est à valeurs réelles, elle atteint ses bornes.

II Connexité par arcs

Définition II.1 (*Chemin continu joignant deux points*)

Soit Ω une partie non vide de E. Soient deux points $a, b \in \Omega$. On appelle **chemin continu de** a **à** b **dans** Ω *toute application continue $f : [0, 1] \to \Omega$ telle que $f(0) = a$ et $f(1) = b$.*

On appelle composantes connexes de Ω les classes d'équivalence de cette relation d'équivalence.

Ω est dite **connexe par arcs** *lorsqu'elle ne contient qu'une seule composante connexe.*

Le programme dit : “dans les cas simples, une figure convaincante vaut preuve de connexité par arcs”.

Exemples :

- Les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.
- Les parties convexes et les parties étoilées sont connexes par arcs.
- $\mathbb{R}^*$ n'est pas connexe par arcs, mais $\mathbb{C}^*$ l'est.

Généralisons le théorème des valeurs intermédiaires :

Théorème II.2

Si une partie Ω d'un espace vectoriel normé E est connexe par arcs, et si $f : \Omega \to F$ est continue, alors $f(\Omega)$ est connexe par arcs.

III Cas de la dimension finie

Théorème III.1

Si E est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sur E sont équivalentes.

En dimension finie, il n'y a donc qu'une seule Topologie d' espace vectoriel normé. Il sera dorénavant inutile de préciser pour quelle norme une partie de E est ouverte, ou compacte, ou bornée,..., puisque si elle l'est pour au moins une norme, elle l'est pour toutes les autres.

- L'application $\left| \begin{array}{ccc} GL_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & GL_n(\mathbb{K}) \\ A & \longmapsto & A^{-1} \end{array} \right.$ est continue sur l'ouvert $GL_n(\mathbb{K})$.

- La convergence d'un suite dans $\mathbb{R}^n$ est équivalente à celle de chacune de ses coordonnées. Idem pour une suite de matrices.
- Un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace vectoriel normé quelconque est fermé.

- **Théorème III.2**

  Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie. Alors,

  (i) Une partie K de E est compacte $\Longleftrightarrow$ elle est fermée et bornée.

  (ii) De toute suite bornée dans E, on peut extraire une suite convergente.

  (iii) Une suite d'éléments de E converge $\Longleftrightarrow$ elle est bornée et admet exactement une valeur d'adhérence.

  (iv) Soit F un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel . Toute $f \in \mathscr{L}(E,F)$ est continue.

- Soit $E = E_1 \times \cdots \times E_p$ un produit d' espaces vectoriels de dimension finie et F un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel . Toute application $p-$linéaire de E dans F est continue. Ainsi, par exemple, les produits scalaires, le produit vectoriel, la multiplication dans l'espace des matrices, la multiplication par un scalaire, les applications $A \longmapsto A^k$ pour $k \in \mathbb{N}$.

IV Retour sur les séries

§ 1. ***Convergence absolue.—*** Enfin la preuve :

Théorème IV.1 (*CVA* $\Longrightarrow$ *CV*)

Soit E un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel normé de dimension finie. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. Fixons-nous une norme $\|.\|$ sur E. Alors si la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \|u_n\|$ converge, il en est de même de la série $\sum u_n$.

§ 2. ***Exponentielle et inverse.—*** Une norme $\|.\|$ sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est dite sous-multiplicative lorsque pour toutes matrices A, B on a $\|A \times B\| \leqslant \|A\| \times \|B\|$. Il en existe, par exemple, $\|A\| = n \max\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}|$.

Théorème IV.2

On se fixe une norme sous-multiplicative sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Soit aussi $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\|A\| < 1$,

(i) la série $\sum_{p\geqslant 0} A^p$ converge.

(ii) $I_n - A$ est inversible, et si on note $B = \sum\limits_{p=0}^{+\infty} A^p$, $B = (I_n - A)^{-1}$.

Définition IV.3

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. La série $\sum A^p/p!$ converge.

On appelle exponentielle de A la matrice $\exp A = \sum\limits_{p=0}^{+\infty} \dfrac{A^p}{p!}$.

Propriétés IV.4

(i) Si A et B commutent, alors $\exp(A + B) = \exp(A) \times \exp(B)$.

(ii) Pour toute matrice A, la matrice $\exp A$ est inversible et $\exp(-A) = \big(\exp A\big)^{-1}$.

V Les figures imposées

Exercices :

CCP 40

Soit A une algèbre de dimension finie admettant e pour élément unité et munie d'une norme notée $||\ ||$.
On suppose que $\forall (u, v) \in A^2$, $||u.v|| \leqslant ||u||.||v||$.

1. Soit u un élément de A tel que $||u|| < 1$.
   (a) Démontrer que la série $\sum u^n$ est convergente.
   (b) Démontrer que $(e - u)$ est inversible et que $(e - u)^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u^n$.
2. Démontrer que, pour tout u de A, la série $\sum \dfrac{u^n}{n!}$ converge.

EXERCICES :

CCP 38 On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.
$\forall\, P \in E$, on pose $N_1(P) = \sum_{i=0}^{n} |a_i|$ et $N_\infty(P) = \max_{0 \leqslant i \leqslant n} |a_i|$ où $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ avec $n \geqslant \deg P$.

1. (a) Démontrer que N_1 et N_∞ sont des normes sur $\mathbb{R}[X]$.
   (b) Démontrer que tout ouvert pour la norme N_∞ est un ouvert pour la norme N_1.
   (c) Démontrer que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.
2. On note $\mathbb{R}_k[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ constitué par les polynômes de degré inférieur ou égal à k. On note N_1' la restriction de N_1 à $\mathbb{R}_k[X]$ et N_∞' la restriction de N_∞ à $\mathbb{R}_k[X]$.
   Les normes N_1' et N_∞' sont-elles équivalentes ?

EXERCICES :

$GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert dense non borné, non fermé, non connexe par arcs de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.